Milí řešitelé

Pokud vás neodradilo zadání první série (ani některé nedostatky ve formulaci úloh), nabízí se vám zde série další. Zasíláme ji se skončením termínu série předchozí tak, aby jste měli stále nad čím bádat* . Ovšem autorská řešení první série dostanete až v příští zásilce spolu s vašimi opravenými úlohami a zadáním třetí série (bystřejší tuší, že opravené úlohy této série dostanete se zadáním čtvrté série atd.) Výjimku tvoří úlohy SNP, jejichž řešení, zejména má-li návaznost na další výklad, se zveřejní v sérii následující po zadání.

Doufáme, že se nám již podařilo udělat dostatečný pořádek v adresáři semináře, takže zadání docházejí včas na pravé místo, včetně správného PSČ (není-li tomu tak, pošlete nám prosím co nejdříve náležité údaje).

Co se týče číslování stránek a úloh, patrně se nevyvarujeme jistých zmatků při rozdělování vašich řešení mezi opravující (předzvěstí toho bylo již pořadí stránek na některých výtiscích první série - chyba ovšem vznikla až u obsluhy kopírky), proto by bylo záhodno, aby každý list vašeho řešení byl označen vaším jménem, číslem úlohy a číslem strany, případně třídou a názvem (či zkratkou) školy (jde-li o první stranu).

Zadání

Úloha II . 1

Dvě sousední stěny a strop v krychlové místnosti jsou tvořeny zrcadly. Pozorovatel namíří světelný paprsek tak, že se odrazí postupně od všech tří zrcadel. Určete směr, který bude svírat odražený paprsek s původním.

Úloha II . 2

V koupelně je kohout na teplou a studenou vodu, již lze pouštět jak do vany, tak do sprchy. Pustíme-li naplno studenou vodu, trvá napouštění vany přímo $\mathbf{t_1}$ minut, přes sprchu $\mathbf{t_2}$ minut. Pokud otevřeme jen kohout teplé vody, prodlouží se napouštění vany na $\mathbf{t_3}$ min přímo a $\mathbf{t_4}$ přes sprchu. Určete, jak dlouho trvá napouštění (přímo i přes sprchu), otevřeme-li oba kohouty (případně počítejte s tím, že studená voda má teplotu $\mathbf{\Theta_1}$ a teplá teplotu $\mathbf{\Theta_2}$).

Úloha II . 3

Odhadněte, jak vysoko může sahat atmosféra na planetě s danou hmotností **m**. Jaká nejvyšší hora může na takové planetě existovat? Porovnejte vaše výsledky s údaji z naší planetární soustavy.

Úloha II . 4

Pomocí elektrického vysoušeče vlasů (zkráceně f.é.n.) změřte měrnou tepelnou kapacitu vzduchu.

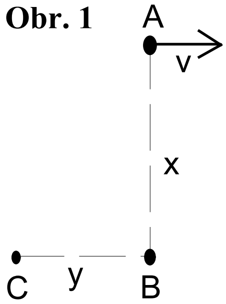
Pozn.: Dbejte všech bezpečnostních zásad při práci s elektrickými zařízeními (doporučená lit. [1]).

* tato série má drobné zdržení, mj. i proto, že jsme si počkali na vaše dopisy s adresami pro korespondenci

Úloha Y . 2

V důsledku malého koeficientu tření pneumatik se automobil jedoucí po ledu nemůže pohybovat se zrychlením větším než $\mathbf{a}$ = 0,5 ms^{-2}. Podle pravidel závodu se řidič musí dostat z bodu A do B ve vzdál. $\mathbf{x}$ = 375 m, přičemž počáteční rychlost $\mathbf{v}$ = 10 ms^{-1} jest ve směru kolmém ke spojnici AB. Určete nejmenší čas, za který toho lze dosáhnout. Jak se změní výsledek, bude-li cílem bod C (viz obr. 1), vzdál. B a C $\mathbf{y}$ = 200 m.

Obr. 1



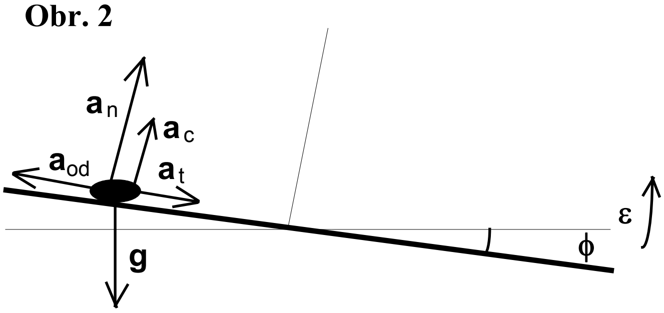
[1]: ing. František Soukup : Elektřina nepromíjí, Práce - nakladatelství ROH, Praha 1955; zejm. str. 19-21, 107 a celá kap. Amatérství-fušérství)

Řešení

Návod k úloze Y . 1

Z řešení došlých před uzávěrkou této série lze usoudit, že nejsilnějším pomocníkem byla výpočetní technika, přičemž někteří se pokusili i o rozsáhlejší analýzu získaných výsledků (Jindřich Kolorenč). Objevily se i netradiční postupy, ovšem důkladnější analytické řešení bylo až na vyjímky (Michal Fabringer) nad řešitelské schopnosti (o existenci obecného analytického (ne numerického) řešení lze mimochodem s úspěchem pochybovat).

Obr. 2



Označíme $\mathbf{l} = \mathbf{a}/2$ a $\mathbf{h}$ amplitudu kmitů. Pak bereme rovnici kmitů (přímo tato závislost ze zadání nevyplývá, ale je nejpřirozenější) pro úhel desky s horizontálou $\varphi = \mathbf{h}/\mathbf{l} \cos(\omega \mathbf{t})$. Protože je nám dáno určovat třecí síly mezi tělískem a deskou, bude nejlépe počítat situaci v soustavě spojené s deskou (osu *x* volím v rovině desky, *y* na ni kolmou, obě pak kolmé na osu otáčení). Místo sil (i fiktivních), jelikož jsou všechny úměrné hmotnosti tělíska, budeme určovat zrychlení tělíska ve směrech těchto os :

osa y:gravitační $- \mathbf{g} \cos(\mathbf{h}/\mathbf{l} \cos(\omega \mathbf{t}))$

setrvačné (vlivem úhlového zrychlení plošiny $\varepsilon = \omega^2 \mathbf{h}/\mathbf{l} \cos(\omega \mathbf{t})$) je rovno $\mathbf{c}\varepsilon$

Coriolisovo (bez vyjímky opomíjeno!!!) $\mathbf{a_c} = 2\,\mathbf{c}'\Omega = \mathbf{c}'\omega\,\mathbf{h}/\mathbf{l} \sin(\omega \mathbf{t})$,

kde $\mathbf{c}'$ je rychlost tělíska po podložce

normálová "síla" desky $\mathbf{a_n}$

osa x:gravitační $- \mathbf{g} \sin(\mathbf{h}/\mathbf{l} \cos(\omega \mathbf{t}))$

odstředivé $\mathbf{a_{od}} = \mathbf{c}\,(\omega\,\mathbf{h}/\mathbf{l} \sin(\omega \mathbf{t}))^2$

třecí $\mathbf{a_t}$ = (znam. podle směru rychlosti = - sign ($\mathbf{c}'$)) $\mu\,\mathbf{a_n}$

Podmínkou stálého kontaktu tělíska s podložkou je

$\mathbf{c}\varepsilon - \mathbf{g}\cos(\mathbf{h}/\mathbf{l}\cos(\omega \mathbf{t})) + \mathbf{a_c} + \mathbf{a_n} = 0$, přičemž $\mathbf{a_n}$ musí být kladné.

Odtud určíme $\mathbf{a_n}$, potom zrychlení tělíska ve směru osy x

$$\mathbf{c}'' = \mathbf{a_{od}} - \mu\,\mathbf{a_n} - \mathbf{g}\sin(\mathbf{h}/\mathbf{l}\cos(\omega \mathbf{t})) = \mathbf{c}\,(\omega\,\mathbf{h}/\mathbf{l}\sin(\omega \mathbf{t}))^2 - \mathbf{g}\sin(\mathbf{h}/\mathbf{l}\cos(\omega \mathbf{t})) -$$
$$- \mu\,(\mathbf{c}\omega^2\,\mathbf{h}/\mathbf{l}\cos(\omega \mathbf{t}) - \mathbf{g}\cos(\mathbf{h}/\mathbf{l}\cos(\omega \mathbf{t})) + \mathbf{c}'\omega\,\mathbf{h}/\mathbf{l}\sin(\omega \mathbf{t}))$$

Toto jest diferenciální rovnice druhého řádu, jejíž obecné řešení zdá se být nad naše síly. Mimo to její platnost je omezena podmínkou $\mathbf{a_n}>0$. Nezbývá než se podívat, co nám zadání dovoluje zanedbat:

(i) kmity desky mají být malé ($\mathbf{h} \ll \mathbf{l}$) $\Rightarrow$ sin ($\mathbf{h}/\mathbf{l}$) = $\mathbf{h}/\mathbf{l}$, cos ($\mathbf{h}/\mathbf{l}$) = 1

(ii) pokud se tělísko vůbec pohybuje, posune se za každou periodu o malý kousek (dle zadání je doba celého procesu mnohonásobkem periody), přičemž povětšinou začíná a končí v klidu: řešíme-li naši rovnici pro jednu periodu, lze považovat **c** za konstantu a **c**′ za malé (tedy Coriolisovo zrychlení zanedbáme).

Dostaneme-li nyní řešení rovnice ve tvaru integrálu, je třeba integrovat jen přes ten interval, kdy se tělísko hýbe, tj. kdy $\mathbf{c}'>0$. Podle počítačových modelů nejlepší výsledky dostaneme, pokud bude bude doba pádu tělíska opravdu o několik řádů větší než perioda.

Mohou však nastat případy, kdy se tělísko chová jinak. Když bude amplituda kmitů větší, vliv gravit. zrychlení v ose x převáží nad odstředivým a v místech, kde je tělísko odlehčováno setrvač. silou (nad horizontálou), bude tělísko klouzat ve směru složky tíhy, tedy ke středu desky. Při malém tření může dokonce tělískou klouzat z jedné stany desky na druhou - tento problém je příbuzný buzeném kyvadlu. Analyticky neřešitelná je situace, kdy bude tělísko poskakovat, tj. nastává $\mathbf{a_n}>0$. Zde je většinou situace chaotická a tělísko může spadnout mnohem dříve, než za předpokládaný mnohonásobek periody.

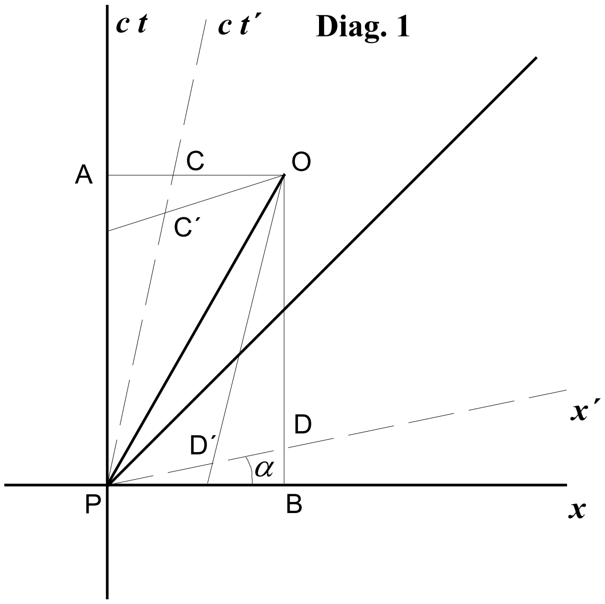
Seriál na pokračování

Dospěli jsme tedy k tomu, že dosavadní, tzv. Galileova transformace souřadnic při přechodu od jednoho inerciálního systému k druhému se dostává do sporu se zákony šíření světla, jak je formulovala Maxwellova teorie elmag. záření. Podle nich je rychlost světelného signálu nezávislá na tom, vzhledem ke které vztažné soustavě ji počítáme. Pokud tedy přijímáme postulát *, platí tyto zákony ve všch soustavách stejně a tedy rychlost světla je vždy konstantní. Potom ovšem postulát ** formulujeme jaksi nadbytečně: činíme tak z důvodu, abychom nemuseli brát Maxwellovy zákony jako součást základů naší teorie. Transformace, které by vyhovovaly oběma postulátům, byly totiž původně vypočteny jako invariantní převod vzorců pro elmag. pole, ovšem můžeme je dostat i na základě pouze našich dvou postulátů, jak nyní ukážeme.

Transformace

Existemce konstantní rychlosti mění naše pravidla pro změny os pohybujících se soustav v prostoročasových diagramech. Jak bylo řečeno, obě osy je třeba stejně sklonit (nebo odklonit) k čáře odpovídající světelnému paprsku. V běžných měřítkách (metry, sekundy) je na diagramech patrná jen změna časové osy (klasická limita STR), při našem škálování (pro zakreslování velkých rychlostí) se obě osy změní o stejný úhel. Takto jsme ovšem schopni zakreslit jen soustavy s rychlostí menší než **c**, jak však vyplyne z dalšího, jinými se ani nebudeme muset zabývat.

Odvozeni:



Obě čárkované soustavy budiž podle předpokladu stejně skloněny o úhel α. Označme poměr $\beta = v/c$, podle diag.1 je tento roven tg α.
V klidových souřadnicích označíme
$PB = x$, $PA = ct$
$PD' = x'$, $PC' = ct'$
Z podobnosti trojúhelníků OCC' a ODD' plyne $OC'/OC = OD'/OD = \gamma$
Obdobně z podobnosti PAC a PBD plyne $AC/PA = BD/PB = \beta$.
Platí $PD' = OC' = \gamma\, OC = \gamma\,(AO - AC) = \gamma\,(PB - \beta\, PA)$,
tedy $x' = \gamma\,(x - \beta ct)$
a obdobně také $ct' = \gamma\,(ct - \beta x)$.

Zbývá urči koeficient γ. Podle relativistického principu by se měla transformace od čárkované soustavy k nečárkované provádět podle stejných vzorců, pouze s opačný znaménkem rychlosti, tedy koef. $-\beta$. Tedy $x = \gamma\,(x' + \beta ct') = \gamma\,(\gamma\,(x - \beta ct) - \beta\gamma\,(ct - \beta x)) = \gamma^2\,(x - \beta^2 x)$. To nám dává $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Tímto je vztah pro jednorozměrnou Lorentzovu transformaci kompletní. Ostatní prostorové souřadnice zůstávajízřejmě invariantní, neboť vzhledem k nim se soustava nepohybuje.
Ještě k úloze **S . 2**. Nejsnáze demonstrovatelný je postup synchronizace pomocí světelného paprsku. Jeden z pozorovatelů vyšle světelný signál a začne měřit čas. Druhý tento paprsek odrazí a nastaví si hodiny na nulu. V okamžiku příchodu odpovědi si prví nastaví na svých hodinách polovimu toho času, jenž naměřil (tedy doby, jenž potřebuje světelný paprsek k překonání vzdálenosti od prvního k druhému a zpět. Zobecnění na více nehybných pozorovatelů je nasnadě.
Úloha S . 3: Zjistěte, jaký výraz složený ze souřadnic x a t daného bodu se při změně vztažného systému nemění (je invariantní vůči Lorentzově transformaci).
Úloha S . 4: Víme, jak se ve vztažném systému dle diagramu určuje rychlost daného bodu. Pohybuje-li se vůči jedné sousatvě daný bod rychlostí **u**, jakou rychlostí se pohybuje vzhledem k jiné soustavě, jejíž rychlost vůči první jest **v**? Pokuste se odvodit spíše pomocí geometrických vztahů v diagramech než podle Lorentzových transformací.

Termín odeslání: 6. prosince 1993
Adresa: FKS, dr. Leoš Dvořák, KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha